



University of Groningen

Multifractals in condensend water.

Siebesma, Anne Pier

IMPORTANT NOTE: You are advised to consult the publisher's version (publisher's PDF) if you wish to cite from it. Please check the document version below.

Document Version

Publisher's PDF, also known as Version of record

Publication date:

1989

[Link to publication in University of Groningen/UMCG research database](#)

Citation for published version (APA):

Siebesma, A. P. (1989). Multifractals in condensend water. s.n.

Copyright

Other than for strictly personal use, it is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

Take-down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Downloaded from the University of Groningen/UMCG research database (Pure): <http://www.rug.nl/research/portal>. For technical reasons the number of authors shown on this cover page is limited to 10 maximum.

Samenvatting

Een kenmerkende eigenschap van een fraktale structuur is zelfgelijkvormigheid: wanneer we een detail van zo'n structuur onder een vergrootglas bekijken ziet deze uitvergroting er net zo uit als het geheel. Het zijn derhalve vormen die geen karakteristieke schaal bezitten en ze zijn dan ook invariant onder verandering van lengteschaal. Dergelijke vormen zijn al bekend sinds het begin van deze eeuw maar werden destijds beschouwd als wiskundige curiositeiten. Het pionierswerk van B. Mandelbrot heeft echter duidelijk gemaakt dat in de natuur juist een grote verscheidenheid van dit soort zelfgelijkvormige structuren voorkomen zoals: bergketens, kustlijnen, wolken, bomen, bliksem enz. Hij liet zien dat het mogelijk is dit soort grillige structuren kwantitatief te beschrijven door middel van een schalingsindex, de fraktale dimensie, die een verband aangeeft tussen de lineaire afmeting en het volume van een object. Voor Euclidische vormen is deze dimensie geheeltallig: een lijn heeft dimensie 1, een vierkant heeft dimensie 2 en een kubus heeft dimensie 3. Fraktalen hebben echter over het algemeen een *niet*-geheeltallige fraktale dimensie. De Koch-curve die in figuur 1.1 van dit proefschrift staat afgebeeld heeft bijvoorbeeld een fraktale dimensie van 1.4317...

Naast fraktale structuren bestaan er ook fraktale distributies. Het histogram op de omslag van dit proefschrift is een voorbeeld van zo'n zelfgelijkvormige distributie. Omdat voor een adequate beschrijving van dit soort distributies een groot aantal verschillende dimensies nodig is, worden ze *multifraktalen* genoemd. Deze multifraktalen spelen een belangrijke rol in dynamische systemen, diverse groeiprocessen, wanordelijke systemen en turbulentie.

De fraktale karakterisering van structuren en distributies in de natuurkunde blijkt een succesvol uitgangspunt te zijn om bepaalde fysische eigenschappen op een fenomenologische manier te onderzoeken: men kan simpele fraktale modellen gebruiken om bijvoorbeeld geleiding en diffusie op zulke structuren te bestuderen.

Een meer fundamentele vraag betreft de fysische oorsprong van (multi)fraktalen: waarom "kiezen" vele systemen voor een (multi)fraktale structuur? Om op deze vraag in te gaan is het nuttig om onderscheid te maken tussen evenwichtssystemen en niet-evenwichtssystemen. Voor een aantal evenwichtssystemen is het al

geruime tijd bekend dat zelfgelijkvormige (fraktale) fluctuaties gaan optreden bij een 2^e orde faseovergang. Eén van de best begrepen voorbeelden kan worden gevonden in de percolatietheorie. Beschouw hiertoe een elektrisch geleidend rooster dat geheel is opgebouwd uit geleidende componenten. Wanneer we nu op een willekeurige manier geleidende componenten gaan weghalen zal het rooster steeds minder goed gaan geleiden en uiteindelijk in brokstukken uiteen vallen: er heeft een overgang plaatsgevonden van een geleidende naar een isolerende fase. Alleen precies op het overgangspunt, wanneer een kritische fractie geleidende componenten is weggeknipt en het rooster op het punt staat in te storten, blijkt alles fraktaal te zijn. De geleidende componenten vormen een fraktale structuur en de spanningsverdeling over de componenten is zelfs multifraktaal. Dit scenario is typisch voor 2^e orde faseovergangen. Deze manifestaties van (multi)fraktalen kunnen echter niet dienen als verklaring voor de vele fraktale verschijnselen die in de natuur optreden. Ze komen namelijk alleen maar voor wanneer systemen op een zeer zorgvuldige manier geprepareerd zijn door een precieze keuze van de controleparameter (zoals de fractie weggehaalde geleidende componenten in het geval van percolatie).

In vele niet-evenwichtsprocessen echter worden zelfgelijkvormige structuren op een *spontane* manier gevormd. Dit gebeurt in een groot aantal zeer uiteenlopende processen zoals:

- turbulentie (energiedissipatie in turbulente media)
- elektrochemische depositie (zinkafzettingen op elektroden)
- diëlektrische doorslag (bliksem)
- vingervorming door het injecteren van bijvoorbeeld water in olie
- epidemieverspreiding
- populatieverspreiding (bevolkingsdichtheid in Groot Brittanië)
- distributie van sterrenstelsels in het heelal

Zelfgelijkvormigheid als functie van tijd is ook in een groot aantal verschijnselen waargenomen variërend van beurskoersen tot rivierstanden. Turbulentie is waarschijnlijk multifraktaal zowel in ruimte als in tijd. In al deze voorbeelden is er sprake van een spontane ontwikkeling naar zelfgelijkvormigheid. De fysische oorsprong van deze tendensen is echter in vele gevallen nog een raadsel.

Dit proefschrift handelt voornamelijk over de multifraktale karakterisering van een aantal verschijnselen in de gecondenseerde materie. Hoofdstuk 1 is een inleiding tot en een samenvatting van het proefschrift. In de hoofdstukken 2, 3 en 4 worden simpele fraktale verzamelingen en multifraktale distributies behandeld en een aantal belangrijke eigenschappen hiervoor afgeleid. Hoofdstuk 5 gaat over over stochastische multiplicatieve processen in het algemeen en de fluctuaties van de quantummechanische golf functie van een elektron in een wanordelijk systeem in het bijzonder. Er is hier duidelijk gemaakt hoe zo'n multiplicatief proces op een natuurlijke manier tot multifraktaliteit leidt. De fluctuaties van een golf functie van een elektron in een

1-dimensionaal incommensurabel systeem is het onderwerp van hoofdstuk 6. Dit is een interessant systeem omdat er als functie van de sterkte van de potentiaal een overgang plaatsvindt van een geleidende naar een niet-geleidende fase. Precies op dit overgangspunt blijkt de golffunctie multifraktaal te zijn. Hoofdstuk 7 is gewijd aan volledig ontwikkelde turbulentie. Een simpel voorbeeld hiervan is afgebeeld in figuur 7.1 waar het water van een snelstromende rivier met grote snelheid langs een brugpijler gestuwd wordt. Er ontstaan dan draaikolken die op hun beurt weer zijn opgebouwd uit kleinere draaikolken etc. Verscheidene simpele fenomenologische fragmentatie-modellen blijken dit experimenteel waargenomen multifraktale gedrag van turbulentie goed te kunnen beschrijven. In hoofdstuk 8 tenslotte wordt dieper ingegaan op een recentelijk ontwikkelde methode die het mogelijk maakt om de fraktale dimensie van fraktale groeiprocessen op een analytische manier te berekenen.